

3.3. UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi

Równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi x i y nazywamy równanie postaci

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A, B, C \in R$ i $A^2 + B^2 \neq 0$

Rozwiązaniem równania z dwiema niewiadomymi nazywamy parę liczb, które spełniają dane równanie.

Ilustracją graficzną równania liniowego z dwiema niewiadomymi jest prosta.

Przykład 3.3.1. Sprawdź, która z par $(-1,6), (5,0)$ jest rozwiązaniem równania
 $-x + 2y + 5 = 0$

Rozwiązanie	Komentarz
$-x + 2y + 5 = 0$ $(-1,6)$ $-(-1) + 2 \cdot 6 + 5 = 0$ $1 + 12 + 5 = 0$ $18 = 0$ Odp. $(-1,6)$ nie jest rozwiązaniem równania.	Sprawdzamy, czy para $(-1,6)$ jest rozwiązaniem równania, podstawiając $x = -1, y = 6$ Po uproszczeniu otrzymujemy równość fałszywą. Zatem $(-1,6)$ nie jest rozwiązaniem równania.
$-x + 2y + 5 = 0$ $(5,0)$ $-5 + 2 \cdot 0 + 5 = 0$ $0 = 0$ Odp. $(5,0)$ jest rozwiązaniem równania.	Sprawdzamy, czy para $(5,0)$ jest rozwiązaniem równania, podstawiając $x = 5, y = 0$ Po uproszczeniu otrzymujemy równość prawdziwą. Zatem $(5,0)$ jest rozwiązaniem równania.

Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi jest układ $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

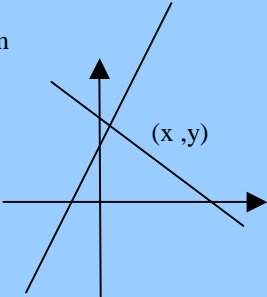
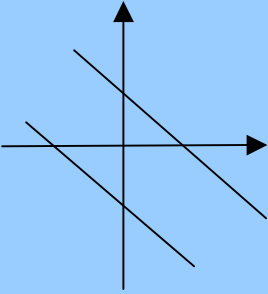
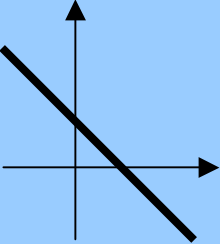
Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi można rozwiązać: metodą podstawiania, metodą przeciwnych współczynników, metodą graficzną.

Przykład 3.3.2. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ metodą podstawiania

Rozwiązanie	Komentarz
$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$	<p>Metoda podstawiania polega na wyznaczeniu niewiadomej z jednego równania i podstawieniu jej do drugiego, otrzymujemy wówczas równanie z jedną niewiadomą, które rozwiązujemy.</p>
$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$	
$\begin{cases} 3x - 2(3 - 2x) = 8 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$	<p>Z drugiego równania wyznaczamy niewiadomą y i podstawiamy ją do pierwszego równania.</p>
$\begin{cases} 3x - 6 + 4x = 8 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$	
$\begin{cases} 3x + 4x = 8 + 6 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$	<p>Drugie równanie przepisujemy, a pierwsze rozwiązujemy.</p>
$\begin{cases} 7x = 14 / : 7 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$	
$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 2 \cdot 2 \end{cases}$	<p>Znalezioną wartość x podstawiamy do drugiego równania i obliczamy y.</p>
$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$	
<p>Odp. Układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$</p>	

Przykład 3.3.3. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \cdot (-5) \\ 5x + 2y = 1 \cdot 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -10x + 15y = -20 \\ 10x + 4y = 1 \end{cases} +$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $-10x + 15y + 10x + 4y = -20 + 1$ $19y = -19 \quad : 19$ $y = -1$ $2x - 3y = 4$ $2x - 3 \cdot (-1) = 4$ $2x + 3 = 4$ $2x = 4 - 3$ $2x = 1 \quad : 2$ $x = \frac{1}{2}$ <p>Odp. . Układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$</p>	<p>Metoda przeciwnych współczynników polega na pomnożeniu równania lub równań przez liczbę lub liczby , w taki sposób , aby otrzymując przy jednej niewiadomej przeciwne współczynniki, wówczas po dodaniu stronami obu równań otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą które rozwiązujemy.</p> <p>Aby przy niewiadomej x otrzymać przeciwne współczynniki , mnożymy pierwsze równanie przez -5 , a drugie przez 2.</p> <p>Równania dodajemy stronami i rozwiązujemy równanie z niewiadomą y.</p> <p>Znalezioną wartość y podstawiamy do pierwszego równania i obliczamy x.</p>

Ilustracja graficzna układu równań liniowych	Liczba rozwiązań	Nazwa układu
<p data-bbox="197 439 280 470">jednym</p>  <p data-bbox="574 412 842 560">Proste przecinają się w punkcie (x, y), którego współrzędne są rozwiązaniem układu</p>	<p data-bbox="916 412 1136 470">jedno rozwiązanie (x, y)</p>	<p data-bbox="1155 412 1340 591">układ oznaczony lub układ równań niezależnych</p>
 <p data-bbox="539 869 884 927">Proste są równoległe rozłączne, nie mają punktów wspólnych</p>	<p data-bbox="916 837 1136 869">nie ma rozwiązania</p>	<p data-bbox="1155 837 1334 1016">układ sprzeczny lub układ równań sprzecznych</p>
 <p data-bbox="507 1236 884 1330">Proste pokrywają się, każdy punkt leżący na tych prostych jest rozwiązaniem układu</p>	<p data-bbox="916 1209 1136 1267">nieskończenie wiele rozwiązań</p>	<p data-bbox="1155 1209 1372 1388">układ nieoznaczony lub układ równań zależnych</p>

Przykład 3.3.4. Rozwiąż algebraicznie układ równań. Wykonaj ilustrację graficzną układu.

$$a) \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie	Komentarz								
$\begin{cases} -x + 2y = 1 \cdot 5 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -5x + 10y = 5 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases} +$ <p>-----</p> $-5x + 10y + 5x - 3y = 5 + 2$ $7y = 7 \quad : 7$ $y = 1$ $-x + 2y = 1$ $-x + 2 \cdot 1 = 1$ $-x = 1 - 2$ $-x = -1 \quad : (-1)$ $x = 1$ <p>Odp. Układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$</p>	<p>Rozwiązujemy układ równań algebraicznie metodą przeciwnych współczynników.</p>								
$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$	<p>Metoda graficzna (ilustracja graficzna) układu polega na narysowaniu prostych opisanych poszczególnymi równaniami, a następnie odczytaniu z rysunku punktów wspólnych obu prostych.</p>								
$-x + 2y = 1$ $2y = 1 + x \quad : 2$ $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ <table border="1" data-bbox="188 1570 791 1693"> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>$y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </table>	x	-1	1	3	$y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$	0	1	2	<p>Z pierwszego równania wyznaczamy y . Przy pomocy tabelki wyznaczamy punkty należące do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$</p>
x	-1	1	3						
$y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$	0	1	2						

$$5x - 3y = 2$$

$$-3y = 2 - 5x / : (-3)$$

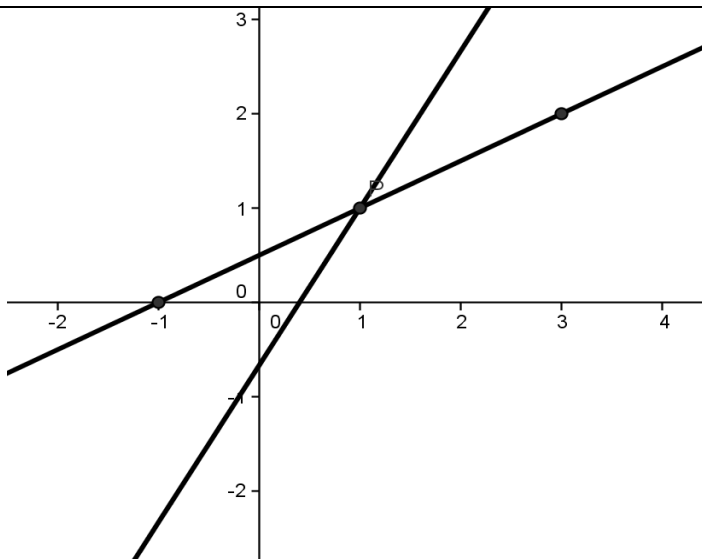
$$y = \frac{2 - 5x}{-3}$$

x	-2	1	4
$y = \frac{2 - 5x}{-3}$	-4	1	6

Z drugiego równania wyznaczamy y .

Przy pomocy tabelki wyznaczamy punkty

należące do prostej o równaniu $y = \frac{2 - 5x}{-3}$



Zaznaczając punkty z tabelki rysujemy proste.

Proste przecinają się w jednym punkcie $P(1,1)$. Współrzędne punktu P są rozwiązaniem układu.

Odp. Układ ma jedno rozwiązanie $(1,1)$.

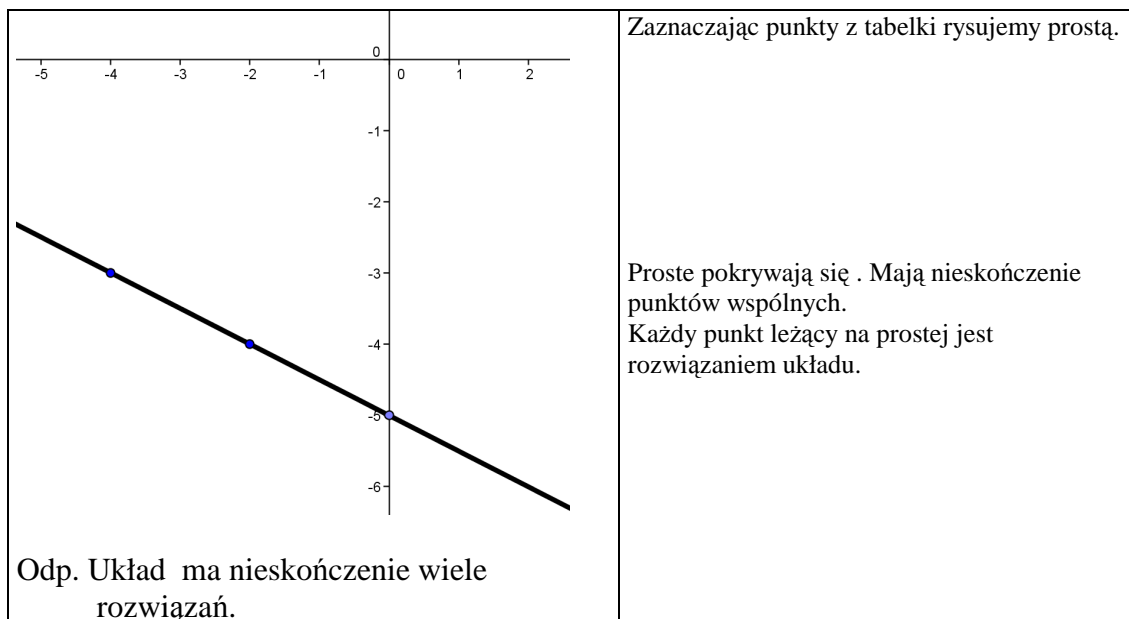
$$b) \begin{cases} 3(x-1) = 5(y+1) \\ 2(3x-1) = 2(5y-1) \end{cases}$$

Rozwiązanie	Komentarz
$\begin{cases} 3(x-1) = 5(y+1) \\ 2(3x-1) = 2(5y-1) \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 3 = 5y + 5 \\ 6x - 2 = 10y - 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 5y = 5 + 3 \\ 6x - 10y = -2 + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 6x - 10y = 0 \end{cases}$	Porządkujemy układ równań.

$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \cdot (-2) \\ 6x - 10y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -6x + 10y = -16 \\ 6x - 10y = 0 \end{cases} \quad +$ <p>-----</p> $-6x + 10y + 6x - 10y = -16 + 0$ $0 = -16$ <p>Odp. Układ nie ma rozwiązania.</p>	<p>Rozwiązujemy układ równań algebraicznie metodą przeciwnych współczynników.</p> <p>Wyniku przekształceń obie niewiadome się redukują i otrzymujemy sprzeczność.</p>						
$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 6x - 10y = 0 \end{cases}$	<p>Rozwiązujemy układ równań metodą graficzną.</p>						
$3x - 5y = 8$ $-5y = 8 - 3x \quad : (-5)$ $y = \frac{8 - 3x}{-5}$ <table border="1" data-bbox="188 853 639 976"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>1</td> <td>-4</td> </tr> <tr> <td>$y = \frac{8 - 3x}{-5}$</td> <td>-1</td> <td>-4</td> </tr> </tbody> </table>	x	1	-4	$y = \frac{8 - 3x}{-5}$	-1	-4	<p>Z pierwszego równania wyznaczamy y . Przy pomocy tabelki wyznaczamy punkty należące do prostej o równaniu $y = \frac{8 - 3x}{-5}$</p>
x	1	-4					
$y = \frac{8 - 3x}{-5}$	-1	-4					
$6x - 10y = 0$ $-10y = -6x \quad : (-10)$ $y = \frac{6}{10}x$ $y = \frac{3}{5}x$ <table border="1" data-bbox="188 1261 639 1384"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>$y = \frac{3}{5}x$</td> <td>0</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>	x	0	5	$y = \frac{3}{5}x$	0	3	<p>Z drugiego równania wyznaczamy y . Przy pomocy tabelki wyznaczamy punkty należące do prostej o równaniu $y = \frac{3}{5}x$</p>
x	0	5					
$y = \frac{3}{5}x$	0	3					
<p>Odp. Układ nie ma rozwiązania.</p>	<p>Zaznaczając punkty z tabelki rysujemy proste. Proste nie mają punktów wspólnych.</p>						

$$c) \begin{cases} \frac{x+y}{5} + \frac{y}{5} = -2 \\ \frac{x}{2} + y = -5 \end{cases}$$

Rozwiązanie	Komentarz								
$\begin{cases} \frac{x+y}{5} + \frac{y}{5} = -2 / \cdot 5 \\ \frac{x}{2} + y = -5 / \cdot 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 5 \cdot \frac{x+y}{5} + 5 \cdot \frac{y}{5} = -10 \\ 2 \cdot \frac{x}{2} + 2y = -10 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + y = -10 \\ x + 2y = -10 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = -10 \\ x + 2y = -10 \end{cases}$	Porządkujemy układ równań								
$\begin{cases} x + 2y = -10 \\ x + 2y = -10 / \cdot (-1) \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = -10 \\ -x - 2y = 10 \end{cases} +$ <p>-----</p> $x + 2y - x - 2y = -10 + 10$ $0 = 0$ <p>Odp. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.</p>	Rozwiązujemy układ równań algebraicznie metodą przeciwnych współczynników. Wyniku przekształceń obie niewiadome się redukują i otrzymujemy tożsamość.								
$\begin{cases} x + 2y = -10 \\ x + 2y = -10 \end{cases}$	Rozwiązujemy układ równań metodą graficzną.								
$x + 2y = -10$ $2y = -10 - x / : 2$ $y = -5 - \frac{x}{2}$ <table border="1" data-bbox="188 1727 644 1845"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>-4</td> <td>-2</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$y = -5 - \frac{x}{2}$</td> <td>-3</td> <td>-4</td> <td>-5</td> </tr> </tbody> </table>	x	-4	-2	0	$y = -5 - \frac{x}{2}$	-3	-4	-5	Oba równania są takie same, dlatego przedstawiają dwie jednakowe proste. Z równania wyznaczamy y . Przy pomocy tabelki wyznaczamy punkty należące do prostej o równaniu $y = -5 - \frac{x}{2}$
x	-4	-2	0						
$y = -5 - \frac{x}{2}$	-3	-4	-5						



ĆWICZENIA

Ćwiczenie 3.3.1. (2pkt.) Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wartości niewiadomej x	1
2	Podanie wartości niewiadomej y	1

Ćwiczenie 3.3.2. (3pkt.) Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} \frac{7x - 3y}{5} = \frac{5x - y}{3} - \frac{x + y}{2} \\ 3(x - 1) = 5(y + 1) - 14 \end{cases}$$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie układu równań uporządkowanego.	1
2	Podanie wartości niewiadomej x	1
3	Podanie wartości niewiadomej y	1